

1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y' - xy^2 - \frac{1}{x}y + x^3 = 0,$$

για την οποία είναι γνωστό ότι μια λύση της είναι της μορφής $y(x) = ax + b$. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) λύσεις y_1, y_2 με $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 2$. Να εξετασθεί η ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσης y με $y(1) = 2017$.

2. i) α) Γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις: να δοθεί ο ορισμός και ένα παράδειγμα. β) Βασικό σύνολο λύσεων ομογενούς γ. δ. ε. n -τάξης: να δοθεί ο ορισμός, να δικαιολογηθεί η ύπαρξη και να εξετασθεί το μονοσήμαντο.

ii) Αν $\{y_1, \dots, y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n -τάξης, να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y της εξίσωσης υπάρχουν n μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές c_1, \dots, c_n ώστε $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$.

iii) Να διατυπωθούν οι οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα ερωτήματα.

3. Να λυθεί η εξίσωση

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0, \quad (E).$$

και να εξετάσετε αν υπάρχουν λύσεις της (E) y_1, y_2 με $y_1(1) = 1$, $y_2(0) = 0$.

4. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2ay' + by = f \quad (E)$$

όπου a, b πραγματικοί αριθμοί με $a > 0, b > a^2$ και f είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στο $[0, +\infty)$.

i) Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες στο $[0, +\infty)$.

ii) Να εξετασθεί αν οι παράγωγοι των λύσεων της (E) είναι φραγμένες στο $[0, +\infty)$.

5. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 2x^2 + 3y^2, \quad y(0) = 0.$$

Υπάρχει λύση που να ορίζεται στο διάστημα $[-1/\sqrt{2\sqrt{6}}, 1/\sqrt{2\sqrt{6}}]$.

6. Να επιλυθεί το σύστημα

$$y'_1 = y_2 + y_3 + x, \quad y'_2 = y_1 + y_3 + 1, \quad y'_3 = y_1 + y_2 - x^2.$$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος που ικανοποιεί τις συνθήκες $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0)$.

* Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)^2y'' - (x^2-x)y' + y = 0.$$

Να περιγραφεί ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

Ζητούνται απαντήσεις σε 5 από τα θέματα 1-6

(*) : προαιρετικό θέμα